SKALÁRNÍ SOUČIN

V vekt. pr. nad $\mathbb{R}$

$g: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

1) $g(u+w, w) = g(u, w) + g(v, w)$

$g(au, v) = a\, g(u, v)$

2) $g(u, v) = g(v, u)$

3) $u \neq 0 \Rightarrow g(u,u) > 0$

$\Rightarrow g$ je SK. SOUČIN. $\quad g(u,v) := (u,v)$

$$\|u\| = \sqrt{(u,u)}$$

$$\cos\varphi = \frac{(u,v)}{\|u\| \cdot \|v\|}$$ ... φ je ODCHYLKA u, v

$(u,v) = 0 \Rightarrow u, v$ jsou KOLMÉ $(u \perp v)$

Gramm-Schmidtova ortogonalizace

$$e_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{(u_{k+1}, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$$

$e_1, \dots, e_n$ ortonorm. báze V, $v \in V$

$$v = (v, e_1) e_1 + \dots + (v, e_n) e_n$$

$u, v \in V$, $(x_1, \dots, x_n)$, $(y_1, \dots, y_n)$ souř. u, v

$$(u,v) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

$U \subseteq V$, $U^\perp$ je vekt. podpr.

$$V = U \dotplus U^\perp$$

ORTOGONÁLNÍ PROJEKCE

$v \in V \Rightarrow v = v_U + v_{U^\perp}$, kde

$v_U \in U$, $v_{U^\perp} \in U^\perp$

$pr_U : V \longrightarrow U$, $v \mapsto v_U$

pr_U se nazývá ORTOGONÁLNÍ PROJEKCE,
v_U se nazývá ORTOGONÁLNÍ (KOLMÁ) PROJEKCE
vektoru v do podpr. U.

pr_U je lineární zobrazení.

Tvrzení V... vekt. pr., U... podprostor V
$e_1, \dots, e_n$ ortonorm. báze U, $v \in V$

$$pr_U(v) = (v, e_1)e_1 + \dots + (v, e_n)e_n.$$

SHODNOSTI

V ... vekt. prostor, $f: V \to V$ lin. tolz.

Řekneme, že f je SHODNOST, jestliže
$$(f(u), f(v)) = (u, v).$$
(též ORTOGONÁLNÍ TRANSFORMACE)

Tvrzení Lin. transformace $f: V \to V$ je shodnost právě tehdy, když zachovává délky vektorů.

Důkaz „$\Rightarrow$" snadné

„$\Leftarrow$" $\|u+v\|^2 = (u+v, u+v) = \|u\|^2 + 2(u,v) + \|v\|^2$
$$(u,v) = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right)$$
$$(f(u), f(v)) = \frac{1}{2}\left(\|f(u)+f(v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\|f(u+v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) = (u, v).$$

Čtvercová matice A se nazývá ORTOGONÁLNÍ, jestliže $A^T A = E$.

Tvrzení $f: V \to V$ lin. transformace

$e_1, \dots, e_n$ ortonormální báze V

A ... matice f vzhledem k $e_1, \dots, e_n$

$\Rightarrow$ f je shodnost $\Leftrightarrow$ A je ortogonální.

BILINEÁRNÍ A KVADRATICKÉ FORMY

V... vekt. prostor nad $\mathbb{R}$

BILINEÁRNÍ FORMA na V je zobrazení

$\beta : V \times V \to \mathbb{R}$, splňující $\forall u, v, w \in V, a \in \mathbb{R}$

$$\beta(u+v, w) = \beta(u,w) + \beta(v,w)$$
$$\beta(au, v) = a\beta(u,v)$$
$$\beta(u, v+w) = \beta(u,v) + \beta(u,w)$$
$$\beta(u, av) = a\beta(u,v)$$

Př.: 1) skalární součin

2) B... matice $n \times n$, $\mathbb{R}^n$, $x, y \in \mathbb{R}^n$

$x = (x^1, \dots, x^n)$, $y = (y^1, \dots, y^n)$

$$\varphi_B(x,y) = \sum_{i,j} B_{ij} x^i y^j$$

$$\varphi_B(x,y) = x^T B y$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(x^1\ x^2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = x^1y^1 + 2x^1y^2 + 3x^2y^1 + 4x^2y^2.$$

V... konečnědim. vekt. pr. s bází $e_1, \dots, e_n$

β... bilin. forma na V

Matice B s prvky $B_{ij} = \beta(e_i, e_j)$ se nazývá MATICE BILINEÁRNÍ FORMY β vzhledem k $e_1, \dots, e_n$.

<u>Tvrzení</u> V... konečněrozměrný vekt. pr., s bází $e_1, \dots, e_n$, β... bilin. forma na V s maticí B. $u, v \in V$ se souřadnicemi $(x^1, \dots, x^n)$, resp. $(y^1, \dots, y^n)$.

Pak
$$\beta(u,v) = \sum_{i,j} B_{ij} x^i y^j = x^T B y.$$

Tvrzení V ... vekt. pr., β ... bilin. forma na V
$e_1, \dots, e_n$ stará báze, $e'_1, \dots, e'_n$ nová báze
Q matice přechodu od staré báze k nové bázi.
B matice formy β vzhledem k $e_1, \dots, e_n$
B' matice β vzhledem k $e'_1, \dots, e'_n$.
Pak
$$B'_{ij} = \sum_{k,l} Q^k_i Q^l_j B_{kl}$$

$$B' = Q^T B Q$$

Čtvercové matice A, B se nazývají KONGRUENTNÍ, jestliže existuje invertibilní matice Q tak, že $A = Q^T B Q$.

Tvrzení Kongruentnost matic je relace ekvivalence.

SYMETRICKÉ BILINEÁRNÍ FORMY

Bilineární forma, která splňuje $\beta(u,v)=\beta(v,u)$, se nazývá SYMETRICKÁ.

Tvrzení Bilin. forma β je symetrická právě tehdy, když je její matice B symetrická,

$$B^T = B.$$

Důkaz „$\Rightarrow$" snadné

„$\Leftarrow$" $\beta(u,v) = x^T B y = (x^T B y)^T =$

$$= y^T B x = \beta(v,u).$$

Tvrzení Matice kongruentní se symetrickou maticí je symetrická.

Důkaz. Cvičení